54. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

540511

Bei der römischen Zahlschrift werden Buchstaben als Zahlzeichen benutzt.

Es gibt die folgenden Zahlzeichen, deren Wert in Klammern angegeben ist:

$M(1000), D(500), C(100), L(50), X(10), V(5)$ und $I(1)$.

Die Werte der Zahlzeichen einer römischen Zahl werden meistens addiert, in besonderen Fällen auch subtrahiert. Wenn eines der Zahlzeichen I, X oder C vor einem Zahlzeichen mit höherem Wert steht, dann muss der Wert dieses Zahlzeichens subtrahiert werden. Allerdings darf das Zahlzeichen I nur vor V oder X stehen, das Zahlzeichen X nur vor L oder C. Das Zahlzeichen V darf nicht vor einem Zahlzeichen mit höherem Wert stehen. Weiterhin dürfen nie mehr als drei gleiche Zahlzeichen aufeinanderfolgen.

Beispiele sind:

$IV\,(5-1=4)$; $IX\,(10-1=9)$; $XL\,(50-10=40)$; $CM\,(1000-100=900)$.

a) Schreibe das Jahr 2014 mit römischen Zahlzeichen.
b) Schreibe die Zahlen 95 und 99 mit römischen Zahlzeichen.
c) Welche Zahl verbirgt sich hinter der folgenden Schreibweise: $CMXCIX$?
d) Ordne die folgenden Zahlen der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl:
CIX, LXI, LIX, XCI, XLI, CXI.
Gib die Zahlen auch in unserem Zahlensystem an.

540512

In den folgenden Aufgaben sollen jeweils vier Kreise gezeichnet werden, die eine vorgegebene Anzahl von Schnittpunkten miteinander haben.

Zeichne sauber und benutze immer einen Zirkel!

a) Zeichne vier gleich große Kreise so, dass sich acht Schnittpunkte ergeben.
b) Zeichne vier gleich große Kreise so, dass sich zehn Schnittpunkte ergeben.
c) Zeichne vier gleich große Kreise so, dass sich zwölf Schnittpunkte ergeben.
d) Begründe, dass es bei vier Kreisen nicht mehr als zwölf Schnittpunkte geben kann.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

540513

Du hast neun Ziffernkarten, auf denen die Ziffern 1 bis 9 jeweils einmal vorkommen. Mit diesen Ziffernkarten sollen zweistellige oder dreistellige Zahlen so gebildet werden, dass folgende Summen mit jeweils zwei Summanden entstehen.

a) Lege sechs dieser Ziffernkarten zu einer richtigen Additionsaufgabe $\boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{} = \boxed{}\boxed{}$ zusammen.

b) Die Ziffernkarten 8 und 1 sollen jetzt das Ergebnis bilden: $\boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{} = \boxed{8}\boxed{1}$.
Finde alle sechs Möglichkeiten, mit den verbliebenen Ziffernkarten richtige Additionsaufgaben zusammenzustellen. Hierbei zählt eine Vertauschung der Summanden nicht als neue Additionsaufgabe.

c) Lege alle neun Ziffernkarten zu einer richtigen Additionsaufgabe $\boxed{}\boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{}\boxed{} = \boxed{}\boxed{}\boxed{}$ zusammen.

540514

Die drei Schwestern Birte, Caroline und Dana hatten vor drei Jahren zusammen 48 Perlen geerbt. Jede hatte so viele Perlen bekommen, wie sie alt war.

Zuerst gab Birte die Hälfte ihrer Perlen zu gleichen Teilen an die beiden Schwestern ab.

Danach gab Caroline die Hälfte ihrer jetzigen Perlen zu gleichen Teilen an ihre Schwestern.

Am Ende gab Dana die Hälfte der Perlen, die sie nun hatte, zu gleichen Teilen an Birte und Caroline.

Das Staunen war groß, als dann alle gleich viele Perlen hatten.

Wie alt sind die Schwestern jetzt?

Ein Tipp: Arbeite dich von hinten nach vorn durch, also von der letzten Verteilung zur ersten. (Das nennt man Rückwärts-Arbeiten.)

54. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

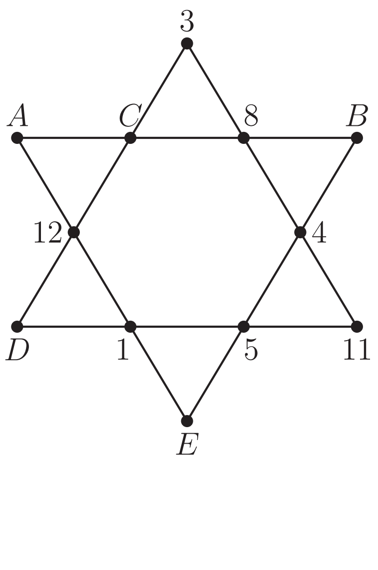
540611

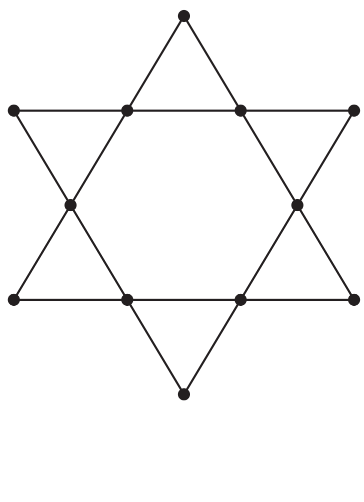
Sabrina mag Sterne und Zahlen. Sie denkt sich deshalb für ihre Freundin folgendes Sternen-Zahlen-Rätsel aus:

In einer Sternfigur sind natürliche Zahlen so eingetragen, dass die Summe von je vier Zahlen, die auf einer gemeinsamen geraden Linie stehen, für alle sechs Linien gleich ist.

a) In der dargestellten Sternfigur wurden einige Zahlen durch Buchstaben ersetzt. Finde für die jeweiligen Buchstaben die entsprechenden Zahlen und überprüfe deine Eintragungen durch Kontrollrechnungen.

b) In einer gleichartigen Sternfigur sollen nun die ungeraden natürlichen Zahlen 1, 3, 5 bis 23 so eingetragen werden, dass wieder auf jeder der sechs Linien die Summe der eingetragenen Zahlen gleich ist. Gib eine Lösungsmöglichkeit an.
Eine Herleitung wird nicht verlangt.





Auf der nächsten Seite geht es weiter!

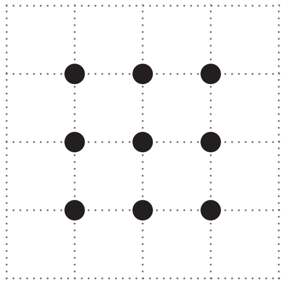
540612

Wähle dir zwei verschiedene zweistellige Primzahlen aus. Bilde aus ihnen durch Hintereinanderschreiben die beiden möglichen vierstelligen Zahlen. Wenn du nun die kleinere der beiden vierstelligen Zahlen von der größeren subtrahierst, dann erhältst du deren Differenz.

a) Finde die größtmögliche Differenz, die du auf diese Weise erhalten kannst.
b) Finde die kleinstmögliche Differenz, die du auf diese Weise erhalten kannst.
Gib alle Paare von Primzahlen an, mit denen du diese kleinste Differenz erhältst.
Wie viele Paare sind es?
c) Warum kann keine der Differenzen eine Primzahl sein?

540613

Auf diesem Nagelbrett können verschiedene Dreiecke mit einem Gummiband aufgespannt werden.



a) Zeichne alle verschieden geformten Dreiecke auf. Zeichne jede Form in ein neues Nagelbrett. (Dreiecke gelten als verschieden, wenn sie nicht durch Drehung oder Spiegelung auseinander hervorgehen.)
b) Gib für jede verschiedene Dreiecksform aus dem Aufgabenteil a) an, wie oft man sie in verschiedenen Lagen auf dem Nagelbrett aufspannen kann.
c) Das kleinste von 4 Nägeln gebildete Quadrat hat einen Flächeninhalt von $1\,\text{cm}^2$. Sortiere die Dreiecksformen nach ihrer Flächengröße.

540614

Ein Reisender möchte mit der Bahn von A-Stadt über B- und C-Stadt nach D-Stadt fahren, wobei er in B-Stadt und C-Stadt umsteigen muss. Die Züge legen in einer Stunde 120 Kilometer zurück. Die gesamte Reisedauer ist mit 5 Stunden und 45 Minuten angegeben. Die reine Fahrzeit beträgt 4 Stunden und 30 Minuten, der Rest ist Umsteigezeit.

Der Zug des Reisenden verlässt pünktlich um 9:38 Uhr den Bahnhof von A-Stadt.

a) Wie viel Zeit verbringt der Reisende auf den Bahnhöfen von B- und C-Stadt insgesamt?
b) Wann wird der Reisende, wenn es zu keinen Verzögerungen kommt, D-Stadt erreichen? Gib die Uhrzeit an.

Von A-Stadt nach B-Stadt sind es 140 Kilometer.

c) Wie spät ist es, wenn der Zug in den Bahnhof von B-Stadt einfährt?

Der Reisende hat in B-Stadt einen Aufenthalt von 40 Minuten. Um 12:50 Uhr erreicht er schließlich C-Stadt.

d) Wann fährt der Zug in C-Stadt los, und wie viele Kilometer sind es noch bis D-Stadt?

Mit Hilfe eines Taschenrechners wäre die Lösung dieser Aufgabe eine langweilige Geduldsarbeit. Deshalb setzen wir voraus, dass ein Taschenrechner nicht zur Verfügung steht.

54. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

540711

Anita, Beate und Christina haben zusammen genau 5 Ringe, nämlich 2 aus Gold und 3 aus Silber. Jede hat mindestens einen und höchstens zwei Ringe. Sie unterhalten sich, allerdings sagt hier keines der drei Mädchen die Wahrheit.

Anita sagt: „Ich habe einen Goldring und einen Silberring." Beate sagt: „Ich besitze genau zwei Ringe." Christina sagt: „Ich habe zwei Ringe aus gleichem Material."

Untersuche, ob man aus diesen Angaben eindeutig ermitteln kann, wer von ihnen wie viele Ringe welchen Materials besitzt, und gib gegebenenfalls diese Verteilung der Ringe an.

540712

Ermittle die Anzahl aller positiven ganzen Zahlen kleiner oder gleich 1 000 000, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 teilbar sind.

540713

Im rechtwinkligen Dreieck wird die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, Hypotenuse genannt. Jede der beiden anderen Seiten heißt Kathete.

a) Zeichne ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei A und den Katheten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ mit einer von dir geeignet festgelegten Länge. Wähle auf der Hypotenuse zwischen den Punkten B und C einen Punkt P und zeichne durch P die Parallelen zu den Katheten. Die eine Parallele schneidet die Kathete $\overline{AB}$ im Punkt R, die andere Parallele schneidet die Kathete $\overline{AC}$ im Punkt S.

b) Das in der Teilaufgabe a) gebildete Viereck $ARPS$ ist ein Rechteck. Miss die Länge des Umfangs des Rechtecks $ARPS$ und vergleiche sie mit der Länge einer Kathete des Dreiecks ABC. Stelle eine Vermutung bezüglich der beiden Längen auf und beweise deine Vermutung.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

540714

Ein Schema von neun in einem 3×3-Quadrat angeordneten Zahlen, bei denen das Produkt der drei Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte 120 beträgt, heiße ProQua120.

Das in Abbildung A 540714 a angegebene Schema ist ein ProQua120 mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 15.

2	5	12
4	3	10
15	8	1

A 540714 a

		3
1		

A 540714 b

		5
3		

A 540714 c

a) Vervollständige das in Abbildung A 540714 b angegebene Schema zu einem ProQua120, in dem neben den beiden schon vorgegebenen Zahlen 1 und 3 jede der Zahlen 2, 4, 5, 8, 10, 12, 15 genau einmal vorkommt.

b) Untersuche, ob man das in Abbildung A 540714 c angegebene Schema zu einem ProQua120 vervollständigen kann, in dem neben den beiden schon vorgegebenen Zahlen 3 und 5 jede der Zahlen 1, 2, 4, 8, 10, 12, 15 genau einmal vorkommt.

c) Ermittle, wie viele verschiedene ProQua120 existieren, in denen jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 15 genau einmal vorkommt.

54. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

540811

Für den Inhalt einer Pralinenschachtel sollen zwei Sorten Pralinen verwendet werden. Von der einen Sorte kosten 100 g Pralinen 2,30 €. Von der anderen kostet die gleiche Menge 1,80 €.

Die Bestückung solcher Pralinenschachteln soll so erfolgen, dass der Verkaufspreis pro 100 g Pralinen dieser Schachteln 2,00 € beträgt.

Ermittle, wie viel Kilogramm Pralinen der ersten Sorte für Schachteln mit einer Pralinengesamtmasse von 10 kg benötigt werden.

540812

Ermittle alle Zahlen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) Die Zahl ist eine dreistellige Primzahl.
(2) Die erste Ziffer stimmt mit der letzten überein.
(3) Die Quersumme der Zahl beträgt 19.

540813

Gegeben sind drei voneinander verschiedene Geraden, die einander in einem Punkt W schneiden.

Gesucht sind Dreiecke, in denen die gegebenen Geraden die Winkelhalbierenden der Innenwinkel sind.

Klaus schlägt folgende Konstruktion vor: „Ich bezeichne die drei Geraden wie üblich mit w_α, w_β und w_γ. Auf w_γ wähle ich einen Punkt C, welcher vom Punkt W verschieden ist. Ich spiegle den Punkt C an w_α und bezeichne den Bildpunkt mit C_α. Anschließend spiegle ich den Punkt C an w_β und bezeichne diesen Punkt mit C_β. Die Gerade durch C_α und C_β heiße c. Den Schnittpunkt von c mit w_α bezeichne ich mit A und den Schnittpunkt von c mit w_β mit B. Das aus den Punkten A, B und C gebildete Dreieck ist eines der gesuchten Dreiecke."

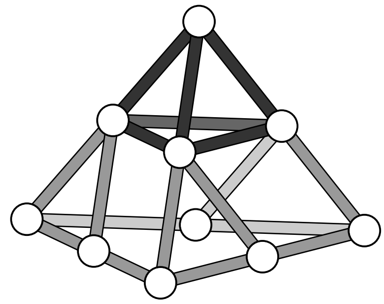
Zeige, dass für die von Klaus angegebene Konstruktion folgende Fälle eintreten können:

a) Die Konstruktion ist durchführbar und führt zu einem solchen Dreieck.
b) Die Konstruktion ist durchführbar, führt aber nicht zu einem solchen Dreieck.
c) Die Konstruktion ist nicht durchführbar.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

540814

Jana hat ein Magnetspiel mit 80 zueinander kongruenten Stabmagneten und 40 zueinander kongruenten Eisenkugeln. Die Verbindung von Stabmagneten kann nur über dazwischenliegende Eisenkugeln erfolgen. Die Maße der Stabmagnete und Eisenkugeln sind derart, dass sich drei Stabmagnete und drei Kugeln problemlos zu einem gleichseitigen Dreieck mit den Kugeln als „Eckpunkten“ verbinden lassen.



A 540814

Jana möchte Modelle von regelmäßigen Tetraedern bauen. Tetraeder sind Vierflächner, also geometrische Körper mit vier Seitenflächen. Ein solches Tetraeder heißt regelmäßig, wenn die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.

Die „Spitze“ des Tetraeder-Modells ist eine Kugel. Von dieser aus wird das Tetraeder-Modell etagenweise nach unten weitergebaut.

Die erste Etage bildet zusammen mit der „Spitze“ ein regelmäßiges Tetraeder-Modell aus vier Kugeln und sechs Stabmagneten. Die erste Etage ist in der Abbildung A 540814 mit schwarzen Stabmagneten und weißen Kugeln dargestellt.

Die n-te Etage bildet zusammen mit den vorherigen Etagen und der „Spitze“ ein regelmäßiges Tetraeder-Modell, dessen Kanten aus jeweils n Stabmagneten und der entsprechenden Anzahl von Verbindungskugeln bestehen. Zur Verstärkung der Stabilität wird weiter an jeder Kugel in der untersten Ebene, die sich innerhalb einer Kante befindet, genau ein Stabmagnet als Querstrebe zu einer Kugel in der nächsthöheren Ebene angesetzt.

In der Abbildung A 540814 ist ein Tetraeder-Modell mit zwei Etagen dargestellt, wobei die zweite Etage mit hellgrauen Stabmagneten und weißen Kugeln gebaut wurde.

a) Gib an, wie viele Kugeln und wie viele Stabmagnete benötigt werden, um das Tetraeder-Modell aus der Abbildung zu bauen.
b) Ermittle, wie viele Kugeln und wie viele Stabmagnete benötigt werden, um an das Tetraeder-Modell aus der Abbildung eine weitere Etage anzubauen.
c) Ermittle die Anzahl der Kugeln und die Anzahl der Stabmagnete in der n-ten Etage.
d) Ermittle, wie viele Etagen das größte solche Tetraeder-Modell hat, das sich mit Janas Magnetspiel bauen lässt.

54. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 9 und 10
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Jahrgangsstufen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

541011

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(-1, 0)$ und $B(3, 0)$ sowie der Graph g der linearen Funktion $y = f(x) = \frac{4}{5}\,x$. Der Punkt Q liege so auf g, dass ABQ gleichschenklig ist.

a) Bestimmen Sie für eine mögliche Lage von Q die Koordinaten!

b) Wie viele verschiedene Punkte gibt es, an denen Q liegen kann?
Weisen Sie die Korrektheit der von Ihnen gefundenen Anzahl nach!

c) Wie kann man mit Zirkel und Lineal die in Teil b) gezählten Punkte konstruieren? (Grundkonstruktionen wie Mittelsenkrechte, Parallele oder Winkelhalbierende dürfen direkt benutzt und müssen nicht beschrieben werden.)

Hinweis: Eine praktisch durchgeführte Konstruktion gemäß Teil c) genügt nicht als Nachweis der Richtigkeit der in Teil b) gefragten Anzahl. In Teil b) wird – wie in der Mathematik üblich – ein logischer Beweis verlangt.

541012

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage:

Wenn man aus der Menge $M = \{1, 2, \ldots, 3279\}$ acht verschiedene Zahlen beliebig auswählt, dann gibt es unter diesen Zahlen stets zwei Zahlen a, b, für die $1 < \frac{a}{b} \leq 3$ gilt.

Hinweis: Das *Schubfachprinzip* (auch Taubenschlag-Prinzip) ist ein wichtiges mathematisches Beweisprinzip. In seiner einfachsten Form sagt es über 10 Taubenschläge Folgendes aus: Sind in den Taubenschlägen 11 Tauben, so halten sich in wenigstens einem Taubenschlag zwei Tauben auf. In seiner allgemeineren Form kann man für 51 Tauben folgern, dass sich in einem Taubenschlag sechs Tauben aufhalten. Überlegen Sie, wie sich dieses Prinzip für obige Aufgabe anwenden lässt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

541013

Seien x, y und z ganze Zahlen. Weiter gelte $0 < x < y^3$ und $x + y^3 = z^3$.

Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert von $y + z$ für alle derartigen Tripel (x, y, z).

541014

Bert versucht, die Seitenflächen eines Würfels so mit Zahlen u (unten), o (oben), r (rechts), l (links), v (vorn) und h (hinten) zu beschriften, dass die zwölf Absolutbeträge der Differenzen von Zahlen benachbarter Seitenflächen gerade die natürlichen Zahlen von 1 bis 12 ergeben.

a) Finden Sie eine solche Beschriftung!
b) Weisen Sie nach, dass die Zahl 17 das größte mögliche Ergebnis ist, welches bei einer solchen Beschriftung als Differenz von Zahlen zweier gegenüberliegender Seitenflächen auftreten kann.

541015

Bei einem Marathonlauf nehmen mehrere Sportler teil. Jedem Sportler soll dabei eine Startnummer zugeordnet werden, die eine ganze Zahl größer als 1 ist. Keine zwei Sportler sollen die gleiche Startnummer erhalten.

Die Startnummern sollen dabei so gewählt werden, dass die Startnummern je zweier Teilnehmer dann und nur dann teilerfremd sind, wenn sich die beiden Teilnehmer nicht gegenseitig kennen.

Man zeige, dass dies möglich ist,

a) wenn jeder jeden kennt,
b) wenn keiner einen anderen kennt,
c) wenn sie sich so in einer Reihe aufstellen, dass jeder nur seine unmittelbaren Nachbarn kennt (freilich haben die zwei äußeren Teilnehmer dieser Aufstellung dann nur einen Nachbarn),
d) wenn fünf Sportler am Lauf teilnehmen und zwei Teilnehmer T_1 und T_2 jeweils die anderen Teilnehmer T_3, T_4 und T_5 kennen, aber alle anderen sich untereinander nicht kennen.
e) Zeigen Sie, dass eine Startnummernvergabe entsprechend der Aufgabenstellung auch in jedem anderen Fall möglich ist.

Hinweis: In der Aufgabe wird – im Gegensatz zu einem Musikstar, den alle kennen, der aber selbst nur wenige seiner Fans kennt – davon ausgegangen, wenn Teilnehmer T_1 Teilnehmer T_2 kennt, dass dann auch Teilnehmer T_2 Teilnehmer T_1 kennt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

541016

Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und auf der Kreislinie zwei Punkte A und B, die mit M ein Dreieck ABM bilden.

Weiter sei D der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und M' der Schwerpunkt des Dreiecks ABM.

a) C sei der Punkt auf der Kreislinie, für den das Dreieck ABC ein spitzwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ ist, und S der Schwerpunkt dieses Dreiecks. Zeigen Sie, dass die Punkte C, S, M und M' auf einer Geraden liegen und $|MC| = 3 \cdot |M'S|$ gilt.

b) X sei ein beliebiger Punkt auf der Kreislinie und T der Schwerpunkt des Dreiecks ABX. Zeigen Sie, dass alle diese Schwerpunkte T auf einer Kreislinie um M' liegen.

Hinweis: Der Schwerpunkt S eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und teilt diese im Verhältnis $2 : 1$.

54. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

541211

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen w, x, y, z, die die Gleichungen

$$x + 10z^2 = 2014\,, \tag{1}$$

$$2y + z = 54\,, \tag{2}$$

$$\left(y + 2z + \frac{7}{2}\,w\right) z = 1211 \tag{3}$$

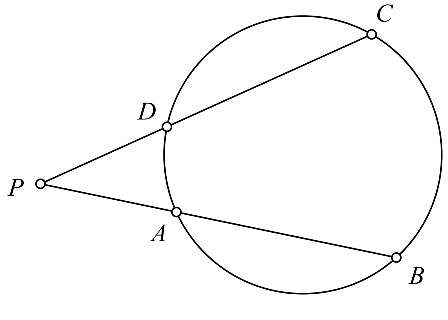
erfüllen.

541212

Gegeben sind ein Kreis vom Radius r und ein außerhalb dieses Kreises gelegener Punkt P. Von P werden zwei Strahlen gezeichnet, die den Kreis in vier Punkten A, B, C und D so schneiden, dass $|AB| = |BC| = |CD|$ gilt.

Ein Strahl enthält die Punkte A und B, der andere die Punkte C und D. Dabei liegt der Punkt D zwischen den Punkten P und C, und der Punkt A liegt zwischen den Punkten P und B, siehe Abbildung A 541212.

Teil a) Man bestimme die Größe des Winkels APD, wenn $|AB| = 5\,\text{cm}$ und $r = 3\,\text{cm}$ gilt.
Teil b) Man gebe eine allgemeine Formel zur Berechnung der Größe des Winkels APD in Abhängigkeit von r und $|AB|$ an.



A 541212

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

541213

Man bestimme alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 2\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{x^2 + 4x + 4} + 3$$

erfüllen.

541214

Auf einige Felder eines 8×8-Schachbretts soll jeweils ein Spielstein gelegt werden. Dabei darf jedes Feld, ob belegt oder nicht belegt, höchstens ein Nachbarfeld haben, das mit einem Stein belegt ist. Man ermittle die maximale Anzahl von Steinen, die unter dieser Bedingung auf dem Schachbrett untergebracht werden können.

Hinweis: Als Nachbarfelder gelten hierbei alle Felder, die mit dem betrachteten Feld eine gemeinsame Seite haben.